第2話　テンソルの定義とその種類

2.1　多重線形形式によるテンソルの定義

2.1.1　双線形形式

- K氏：さて，お約束通りテンソルを新たに定義しよう．第1話でテンソルの成分 T_{ij} は (1.1.12) で見たように

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}_j \tag{2.1.1}$$

というベクトルの内積で与えられた．T_{ij} は一つの実数，スカラーだ．この数 T_{ij} は見て分かるようにベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ によって決まる．ということは実数値 T_{ij} は2つのベクトル $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ の関数と見做そうというわけだ．この関係を

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}_j = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} T_{11} = T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & T_{12} = T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & T_{13} = T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \\ T_{21} = T(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & T_{22} = T(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & T_{23} = T(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\ T_{31} = T(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) & T_{32} = T(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) & T_{33} = T(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

と表わそう．次に，これを少し拡張して，ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を変数とし，実数値 (スカラー) をとる関数 T を考えてみよう．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ とスカラー α に対して

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + T(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ T(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \alpha T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \end{cases} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ T(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{2.1.4}$$

が成り立つとき，T を双線形形式と呼んでいる．これは2つの変数それぞれについて線形性が成り立っているという意味だ．(2.1.3) で第2の変数 $\boldsymbol{z}$ を固定すると，第1の変数に対して線形関係が成り立っているし，(2.1.4) では第1の変数 $\boldsymbol{x}$ を固定すると，第2の変数に対して線形関係が成り立っているだろう．だからあわせて双線形形式というんだね．そして双線形形式の T を2階テンソルと呼んでいる．例えばベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の内積なんかはそのいい例だね．

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \tag{2.1.5}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &T(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + T(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ &T(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

となって，T は (2.1.3) の関係を満たすだろう．同様にして (2.1.4) の関係も満たすね．これから T は双線形形式で，ベクトルの内積は2階テンソルということになる．なお，第1話でやったテンソルの定義 $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$ の T と同じだね．

- エミリー：双線形形式による 2 階テンソルの定義はなんとなく分かったような気にもなるけど，もう少し具体的に説明していただけるかしら．

- K氏：了解．ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は基底を使って書くと次のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{2} x_i\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{y} &= y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{j=1}^{2} y_j\boldsymbol{e}_j\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

T の双線形性より

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= T(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3,\, y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= T(x_1\boldsymbol{e}_1, y_1\boldsymbol{e}_1) + T(x_1\boldsymbol{e}_1, y_2\boldsymbol{e}_2) + T(x_1\boldsymbol{e}_1, y_3\boldsymbol{e}_3) \\ &+ T(x_2\boldsymbol{e}_1, y_1\boldsymbol{e}_1) + T(x_2\boldsymbol{e}_1, y_2\boldsymbol{e}_2) + T(x_2\boldsymbol{e}_1, y_3\boldsymbol{e}_3) \\ &+ T(x_3\boldsymbol{e}_1, y_1\boldsymbol{e}_1) + T(x_3\boldsymbol{e}_1, y_2\boldsymbol{e}_2) + T(x_3\boldsymbol{e}_1, y_3\boldsymbol{e}_3)\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

と表すことができるだろ．さらに続けると

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= x_1y_1T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + x_1y_2T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + x_1y_3T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \\ &+ x_2y_1T(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + x_2y_2T(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + x_2y_3T(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\ &+ x_3y_1T(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + x_3y_2T(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) + x_3y_3T(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_iy_jT(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = x_iy_jT(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

ここで (2.1.2) を使うと

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= x_iy_jT(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\ &= x_1y_1T_{11} + x_1y_2T_{12} + x_1y_3T_{13} \\ &+ x_2y_1T_{21} + x_2y_2T_{22} + x_2y_3T_{23} \\ &+ x_3y_1T_{31} + x_3y_2T_{32} + x_3y_3T_{33} \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}x_iy_j = T_{ij}x_iy_j\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

最後は，一つの項の中に同じ添字が 2 回現れた場合その添字について和をとる，というアインシュタインの規約を使っている．この規約による書き方はこれからもちょいちょい顔をだすので ?? とならないように頼むよ．さて，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対する T の 9 個の成分 T_{ij} を知れば，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対する実数値 $T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を知ることができる．T_{ij} は基底 $\boldsymbol{e}_i$ に関する 2 階テンソル T の成分だね．ところで少し話題を変えて，ある特定のベクトル $\boldsymbol{a}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ との内積を考えると

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i \tag{2.1.11}$$

となって，この値は実数だ．そこで $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ をベクトル $\boldsymbol{b}$ の関数と考え

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{2.1.12}$$

としてみよう．そうすると，この関数 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b})$ は実数値をとり，さらに次のように線形性が成り立つことが分かる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b}) &= \alpha\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}) \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

つまり，ベクトル $\boldsymbol{a}$ はそれ自身1個のベクトル変数 $\boldsymbol{b}$ について線形性を持つ実数値関数であるということができる．このことからベクトルは1階のテンソルとも言われるんだ．基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対する $\boldsymbol{a}$ の値は

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i = a_i \tag{2.1.14}$$

で，$\boldsymbol{a}$ のもともとの第 i 成分と一致している．

- エミリー：2個のベクトル変数をもつ線形スカラー関数は2階テンソルということだから，ベクトル変数が1個の線形スカラー関数は1階のテンソルということね．その成分は $T_i = a_i$ ということで，下付きの添え字は1個ね．テンソルというのはベクトルより基本的な量ということかしら. スカラーはそうすると0階テンソルということになるの？

2.1.2 多重線形形式

- K氏：うん，スカラーは0階テンソルだね．この辺りのことは先の話で予定しているテンソルの座標変換のところでよりはっきりと分かるようになると思う．その話題はまだ先へ伸ばしておくとして，ここでは双線形性を拡張して多重線形形式による高階テンソルの定義を載せておこう．
  まず3階テンソルだけど，任意の3つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ に対して実数値 $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を対応させる関数 T があって，次の3重線形性が成り立つとしたとき，T を3階テンソルといっている．

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+T(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \\ T(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \alpha T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \end{cases} \tag{2.1.15}$$

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) \\ T(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \alpha T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \end{cases} \tag{2.1.16}$$

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}) \\ T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha\boldsymbol{z}) = \alpha T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \end{cases} \tag{2.1.17}$$

T を3階テンソルとして

$$T_{ijk} = T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k) \quad (i,j,k=1,2,3) \tag{2.1.18}$$

とおこう．成分の数は $3^3 = 27$ 個だ！ T の3重線形性より

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= T(\sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{3} y_j\boldsymbol{e}_j,\ \sum_{k=1}^{3} z_k\boldsymbol{e}_k\,) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} T(x_i\boldsymbol{e}_i, y_j\boldsymbol{e}_j, z_k\boldsymbol{e}_k) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_i y_j z_k T(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k) \\ &= T_{ijk}x_i y_j z_k \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

となる．基底ベクトル系 $\boldsymbol{e}_i$ に対する T の 27 個の成分 T_{ijk} が分かれば，任意のベクトルに対する実数値 $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を知ることができる．T_{ijk} は基底系 $\boldsymbol{e}_i$ に関する 3 階テンソル T の成分だね．

次に 4 階テンソルだが，任意の 4 つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}$ に対して実数値 $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})$ を対応させる関数 T があって，4 重線形性が成り立つとしたとき，T を 4 階テンソルといっている．基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ として，テンソル成分を

$$T_{ijkl} = T(\boldsymbol{e}_i,\, \boldsymbol{e}_j,\, \boldsymbol{e}_k,\, \boldsymbol{e}_\ell) \tag{2.1.20}$$

とおくと，成分の数は合計ナント $3^4 = 81$ 個となる．$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})$ は次式で与えられる．

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}) = T_{ijk\ell}x_iy_jz_ku_\ell \tag{2.1.21}$$

以上，多重線形形式による 4 階までの高階テンソルの定義を見てきたけど，5 階，6 階などへの形式的な拡張は容易だよね．一般に n 個の任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ に対して実数値 $T(\boldsymbol{x}_1$ $,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ を対応させる関数 T があって，それぞれのベクトル変数について線形性

$$\begin{aligned} &T(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_r{}',\cdots,\boldsymbol{x}_n) = T(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\cdots,\boldsymbol{x}_n) + T(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r{}',\cdots,\boldsymbol{x}_n) \\ &T(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\alpha\boldsymbol{x}_r,\cdots,\boldsymbol{x}_n) = \alpha T(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\cdots,\boldsymbol{x}_n) \qquad (r=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

が成り立つとき，関数 T を n 階のテンソルといい，n をそのテンソルの階数というんだね．テンソルは高階になるほどその成分の数は厭になるほど多くなるネ．

- エミリー：一般論になると“ $\cdots$ ”なんかが沢山でてきて目がチラチラし，難しそうに感じてしまうわ．

- K氏：具体的なケースさえしっかり捉えておけば，一般論はざっくり見ておけばよいと思うけど．

- エミリー：2 階，3 階，4 階と高階テンソルのお話を伺ってきたわけだけど，具体的な物理量としてどのようなものがあるのかしら．2 階テンソルは冒頭に登場した誘電率テンソルや応力テンソルがそうなんだけど，3 階や 4 階テンソルの具体例を上げていただけるかしら．

- K氏：そうだね，思いつくままに上げると，2 階テンソルはエミリーがいった他に慣性テンソル，角運動量テンソル，マクスウェルの応力テンソルなどがあるし，3 階テンソルはいまチョッと思いつかいないけど，4 階テンソルは弾性テンソルなどがあるね．

- エミリー：そうなんだ．2 階ぐらいで収めておこうかなと思っていたけど，そういうわけにもいかないわね．

- K氏：まぁ，余り力まずにやっていくことにしよう．

2.2 テンソルの演算

2.2.1 単位テンソルとゼロテンソル

- K氏：演算の基本的な数として 0 と 1 は必須だよね．ベクトルに単位ベクトル $\boldsymbol{I}$ とかゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ があったように，テンソルにも単位テンソルとゼロテンソルがある．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

であるとき，I を単位テンソルという．クロネッカーのデルタと呼ばれる δ_{ij} を使うと単位テンソルは

$$I_{ij} = \delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.2.2}$$

と小洒落た書き方ができる．逆に言うとクロネッカーの (δ_{ij}) は単位テンソルということだね．

次にゼロテンソルだけど，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$O\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.2.3}$$

であるとき，O をゼロテンソルという．当たり前だけど，ゼロテンソル成分はすべて 0．

- エミリー：単位テンソルは 2 階テンソルだけど，3 階，4 階といった高階単位テンソルというのもあるのかしら？

- K 氏：そうだね，4 階単位テンソルというのをどこかでみかけたことはあるよ．さて，次にテンソル算法の話に入ろう．

2.2.2 和，差，スカラー倍とテンソル積

- K 氏：簡単のために 2 階テンソルを例にとるけど，同じ階数のテンソル T と S がありそれぞれの成分を T_{ij}, S_{ij} とすると，テンソルの和，差，スカラー倍は次のように表される．高階テンソルでも同じだ．もっとも，テンソルの階数は同じでないと駄目だけど．

$$\begin{cases} \text{テンソルの和：} & U = T + S, & \text{成分：} & U_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \\ \text{テンソルの差：} & V = T - S, & \text{成分：} & V_{ij} = T_{ij} - S_{ij} \\ \text{スカラー倍：} & W = \alpha T, & \text{成分：} & W_{ij} = \alpha T_{ij} \end{cases} \tag{2.2.4}$$

テンソルの対応する成分がすべて等しく $T_{ij} = S_{ij}$ ならば，$T = S$ だね．

■ p 階と q 階のテンソル積は $p + q$ 階のテンソル

- 次にテンソル積だ．この場合 2 つのテンソル T, S の階数は異なっていてもかまわない．いま 2 階テンソル T, S の成分をそれぞれ T_{ij}, S_{ij} としよう．そうすると T と S のテンソル積は

$$W = T \otimes S = T_{ij} S_{k\ell} = W_{ijk\ell} \tag{2.2.5}$$

で表し，これか 4 階テンソルになる．同様に，2 階テンソル T_{ij} と 3 階テンソル S_{ijk} のテンソル積は

$$U = T \otimes S = T_{ij} S_{k\ell m} = W_{ijk\ell m} \tag{2.2.6}$$

と表し，これは 5 階テンソルになる．$\otimes$ という記号ははテンソル積ですよという意味だね．一般に p 階テンソルと q 階テンソルのテンソル積は $p + q$ 階のテンソルとなる．なお，一般にテンソル積は交換関係が成立しない，

$$T \otimes S \neq S \otimes T \tag{2.2.7}$$

であることに注意してください．

- エミリー：テンソル積というのは各テンソルのすべての成分の相互の積，つまり総当りの積を成分とするのね．T, S を

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

という 2 階テンソルすれば，W は合計 $9 \times 9 = 81$ 個の成分を持つ 4 階テンソルになるのね．成分を全部書くのは大変だから，少しだけ具体的に書くと

$$\begin{aligned} &W_{1111} = T_{11}S_{11}, \quad W_{1112} = T_{11}S_{12}, \quad W_{1113} = T_{11}S_{13} \\ &W_{1121} = T_{11}S_{21}, \quad W_{1122} = T_{11}S_{22}, \quad W_{1123} = T_{11}S_{23} \\ &W_{1131} = T_{11}S_{31}, \quad W_{1132} = T_{11}S_{32}, \quad W_{1133} = T_{11}S_{33} \\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ &W_{1211} = T_{12}S_{11}, \quad W_{1212} = T_{12}S_{12}, \quad W_{1213} = T_{12}S_{13} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

といった調子ね．

■ベクトルのテンソル積はダイアド

- K氏：そうだね．ところで，テンソル積については次の演算則が成り立つんだ．α, β を任意の数として

$$\begin{aligned} &(\alpha T \otimes \beta S) \otimes U = \alpha T \otimes (\beta S \otimes U) \\ &(\alpha T + \beta S) \otimes U = \alpha T \otimes U + \beta S \otimes U \quad (T \text{ と } S \text{ は同階}) \\ &U \otimes (\alpha T + \beta S) = \alpha U \otimes T + \beta U \otimes T \quad (T \text{ と } S \text{ は同階}) \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

ベクトルは 1 階のテンソルと見做せるね．だから，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のテンソル積，これを直積といったりもするけど，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} &= (a_i \boldsymbol{e}_i) \otimes (b_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= a_i b_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\ &= a_1 b_1 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + a_1 b_2 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + a_1 b_3 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\ &+ a_2 b_1 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + a_2 b_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + a_2 b_3 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\ &+ a_3 b_1 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 + a_3 b_2 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 + a_3 b_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

と表せる．これは 1 階 +1 階の 2 階テンソルだね．基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から作られるテンソル積 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ の数は，相異なる 3 個から重複を許して 2 個とってできる順列の数（重

複順列：${}_n\Pi_r = n^r$ 個）となるので全部で $3^2 = 9$ 個だね，具体的には

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

なので，(2.2.10) は

$$
\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = a_i b_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = (a_i b_j) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{2.2.12}
$$

となる．ベクトルのテンソル積 $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{ab}$ と書くこともあり，内積と違って真ん中のドットはないだろう，これをダイアドと呼んでいる．ダイアドについては「電磁気学のコーナー」にレポートを載せているから時間のあるときにでもチェックすればいいと思うけど．

ところで，ベクトルの内積は交換可能，つまり $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ だったが，ベクトルのテンソル積は

$$
\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} = b_i a_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = (a_j b_i) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{2.2.13}
$$

となるので，一般に交換則は成立せず

$$
\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} \tag{2.2.14}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{a} /\!/ \ \boldsymbol{b}$ であれば $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$($\alpha$: 実数) なので，交換則は成立する．

■ 2 階テンソルの基底

- さて，先ほどでてきた基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から作られる 9 個のテンソル積 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を使うと，任意の 2 階テンソル T_{ij} はこれら 9 個の $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ の線形結合で表すことができるね．つまり

$$
\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \\
&= T_{11} \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + T_{12} \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + T_{13} \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\
&\quad + T_{21} \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + T_{22} \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + T_{12} \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\
&\quad + T_{31} \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 + T_{32} \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 + T_{33} \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\
&= T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

と表せる．

$$
T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = O \quad \text{（ゼロテンソル）} \tag{2.2.16}
$$

のとき，すべてのテンソル成分は $T_{ij}=0$ となるので，9 個の $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ は 1 次独立だ．そこでベクトルの基底と同じように $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ はテンソル成分 T_{ij} の基底をなすと考えることができる．ついでに，先ほどでてきた単位テンソル I は

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3 \tag{2.2.17}$$

と表せるね.

■ 3 階テンソルの基底

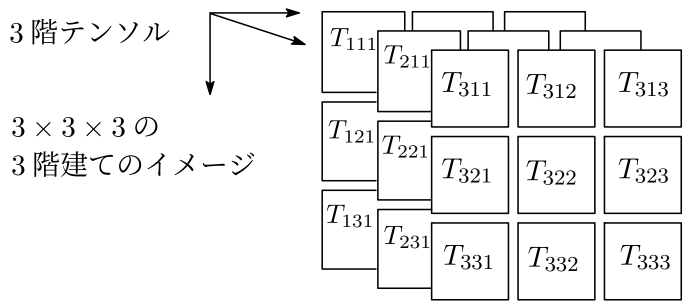
- 3 階テンソルの場合の基底も同様にして

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k \tag{2.2.18}$$

で，3 階テンソルは

$$T=T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k \tag{2.2.19}$$

と表せる．3 階テンソルの成分の数は先ほどの重複順列の考えから ${}_3\Pi_3=3^3=27$ 個となる．3 階以上は行列形式で書けないんだ．先ほどエミリーが 4 階テンソルの成分を書きだしていたけど，3 階テンソルを図で描くと 3 階建ての建物（$9\times3=27$）のようになるし，4 階テンソルなら 9 階建て（$9\times9=81$）となるんだね.



- エミリー：高階テンソルは高層建築ね！ n 階テンソルの成分の数は ${}_3\Pi_n=3^n$ で，2 階以上のテンソル建築物の敷地面積は $3\times3=9$ だから，建屋の階層は $3^n\div9$ になるというわけね.

■テンソルの内積

- K 氏：さて，このセクションの話の最後に，テンソルの内積について少し触れておこう．テンソルに内積があるの？と思われそうだが，2 つの 2 階テンソル T と S の内積は

$$T:S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}T_{ij}S_{ij}=T_{ij}S_{ij}=T_{11}S_{11}+T_{12}S_{12}+\cdots+T_{32}S_{32}+T_{33}S_{33} \tag{2.2.20}$$

と定義されるんだ．ベクトルの内積と同じように同じ成分同士の積の総和でスカラーだ．ベクトルの内積と異なるという意味でドットのかわりに：を使っている．例えば 2 階テンソル T の大きさ（長さ）は

$$\|T\|=\sqrt{T:T}=\sqrt{T_{ij}T_{ij}} \tag{2.2.21}$$

で定義されているね．この幾何学的意味を考えようとしても意味ないよ．ベクトルに倣って形式的に拡張しただけのものだ.

2.3 対称・反対称テンソル

2.3.1 対称テンソル

- K氏：2 階テンソルの成分が

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{2.3.1}$$

を満たすとき，T を対称テンソルという．第 2 話の冒頭で双線形形式によるテンソルの定義をしたけど，それに従えば

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \tag{2.3.2}$$

ということだ．9 個の成分のうち独立成分は 6 個となる．というのは独立成分の数は添え字としての $i, j = 1, 2, 3$ の 3 個から重複を許して 2 個選択する組み合わせの数[1]のに等しいので

$$\text{独立成分数} = {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

となるね．2 階テンソルの場合，成分は行列形式で書けたから，対称テンソルは

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

と表せる．転置を上付きの t で表すと 2 階対称テンソルは

$$T =^t T \longleftrightarrow T_{ij} = T_{ji} \tag{2.3.4}$$

とも書ける．${}^tT$ を転置テンソルという．

3 階対称テンソルはすべての添え字について対称，つまり任意の 2 つの添字を交換しても変わらないので

$$T_{ijk} = T_{jik} = T_{kij} \tag{2.3.5}$$

3 重線形形式に従えば

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = T(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.3.6}$$

と書ける．独立成分の数は添え字の組み合わせとして

$$(i, j, k) = (111), (112), (122), (113), (133), (222), (223), (233), (333), (123)$$

の 10 個になるね．この数は 3 つの異なる数から重複を許して 3 つとる重複組み合わせの数に等しいので，${}_nH_r =_{n+r-1} C_r$ で $n = 3$, $r = 3$ とおいて 10 となる．

とことで，3 階テンソル T_{ijk} で j, k について対称の場合の独立成分の数をついでに求めておこう．

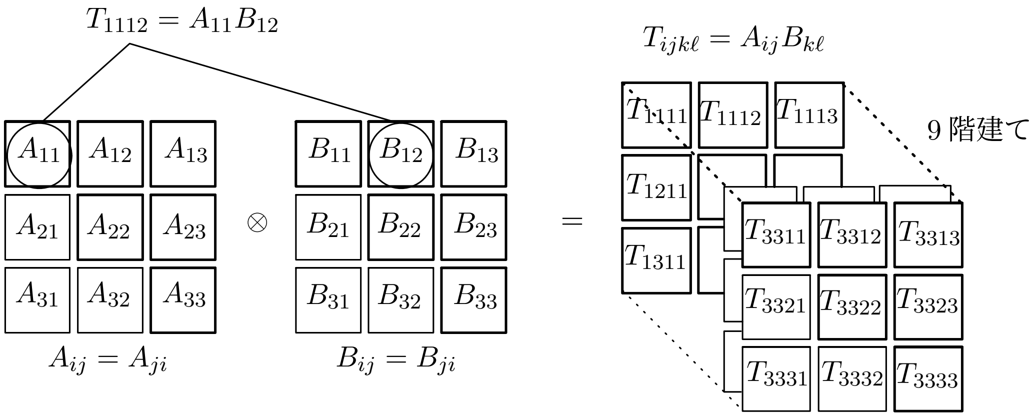
$$T_{ijk} = T_{ikj} \tag{2.3.7}$$

j, k の選び方は 3 つの異なる数から重複を許して 2 つとる重複組み合わせの数に等しいので ${}_3H_2 = 6$ だね．i は 3 通りあるので $3 \times 6 = 18$ 個が独立成分の数となる．

最後に 4 階対称テンソルの独立成分の数だけど，これも重複組み合わせの考えを使えば ${}_3H_4 = 15$ 個となる．また，$T_{ijk\ell}$ で $i \leftrightarrow j$，$k \leftrightarrow \ell$ について対称な場合の独立成分の数は 36 個，さらに $ij \leftrightarrow k\ell$ についても対称な場合には 21 個の独立成分数となる．

[1]重複組み合わせ：n 種の中から重複を許して r 個取りだす組み合わせの数は ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ で与えられる．

- エミリー：一寸待って，後の 2 つのケースの独立成分数の算出法はどうなっているの？
- K氏：え〜っと，4 階テンソルは 2 階テンソルのテンソル積で与えられるだろう．4 階対称テンソルで $T_{ijk\ell}$ で $i \leftrightarrow j$，$k \leftrightarrow \ell$ について対称ということは 2 階対称テンソルのテンソル積と考えればいいわけだね．2 階対称テンソルの独立成分は 6 個だろう．だから 4 階対称テンソルの独立成分は $6 \times 6 = 36$ 個となる．下に図を書いておいたから参考にして．



次に，$ij \leftrightarrow k\ell$ についても対称な場合だけど，言ってみれば A ブロックと B ブロックは対称なので上で求めた独立成分を 2 分すると $36 \div 2 = 18$ 個．これが独立成分の数 ... と思いそうだが，ここで注意が必要だ．というのは A ブロックの添え字 ij と B ブロックの添え字 $k\ell$ が同じ成分，具体的にいえば $T_{1111}, T_{1212}, T_{1313}, T_{2222}, T_{2323}, T_{3333}$ の 6 成分は 36 成分の中でそれぞれ 1 個しかないのでこれを 2 分すると $6 \div 2 = 3$ で残りの 3 個の成分数を足さなければいけない．つまり，独立成分は $18 + 3 = 21$ 個となるというわけなんだ．

- エミリー：$\cdots$ え〜っと，36 成分を全部書き出すと

$$\begin{bmatrix} \underline{T_{1111}} & T_{1211} & T_{1311} & T_{2211} & T_{2311} & T_{3311} \\ T_{1112} & \underline{T_{1212}} & T_{1312} & T_{2212} & T_{2312} & T_{3312} \\ T_{1113} & T_{1213} & \underline{T_{1313}} & T_{2213} & T_{2313} & T_{3313} \\ T_{1122} & T_{1222} & T_{1322} & \underline{T_{2222}} & T_{2322} & T_{3322} \\ T_{1123} & T_{1223} & T_{1323} & T_{2223} & \underline{T_{2323}} & T_{3323} \\ T_{1133} & T_{1233} & T_{1333} & T_{2233} & T_{2333} & \underline{T_{3333}} \end{bmatrix} \tag{2.3.8}$$

となって，アンダーラインを引いた 6 成分以外の成分は対称成分として“ 対 ”であるわね．だから $6 \div 2 = 3$ で 3 成分不足することになるわけか．つまり独立成分は $36 \div 2 + 3 = 21$ 個というわけね，了解したわ．

■対称テンソルの独立成分数

- 対称テンソルの独立成分の数をまとめておくと

・2 階対称テンソル　:　6 個
・3 階対称テンソル　:　10 個　ただし，対称性が低い $T_{ijk} = T_{ikj}$ の場合は 18 個
・4 階対称テンソル　:　15 個　ただし，対象性が低い $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow \ell, ij \leftrightarrow k\ell$ の場合は 21 個
　　　　　　　　　　　　　　さらに　〃　$i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow \ell$ の場合は 36 個

ということね．

2.3.2 反対称テンソル

- K氏：反対称テンソルは交代テンソルとも呼ばれる．反対称テンソルは添え字を入れ替えたときに正負が反対になるもので，2 階反対称テンソルは

$$T_{ij} = -T_{ji} \tag{2.3.9}$$

を満たす．行列形式で表すと

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & -T_{31} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ T_{31} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

なので

$$T = -{}^tT \longleftrightarrow T_{ij} = -T_{ji} \tag{2.3.11}$$

とも書ける．${}^tT$ は転置テンソルと呼んでいる．2 階反対称テンソルの対角成分は 0 になるから，独立成分の数は 3 個になるね．3 階反対称テンソルは

$$T_{ijk} = T_{jki} = T_{kij} = -T_{jik} = -T_{kji} = -T_{ikj} \tag{2.3.12}$$

を満たす．

- エミリー：最初の 3 つは添え字の入れ替えを偶数回やっているので符号は正，後の 3 つは入れ替えを奇数階やっているので符号は負ということで，具体的に書けば

$$T_{123} = T_{231} = T_{312} = -T_{213} = -T_{321} = -T_{132}$$

ということね．このことから 3 階反対称テンソルの独立成分の数は 1 個になる．

■ 3 階反対称テンソルの独立成分の数

- K氏：うん．ところで，3 階反対称テンソルでも T_{ijk} が jk について反対称というのもあり，このケースの独立成分は i の選び方が 3 通りで j, k の選び方は 3 個のものから 2 個取りだす組み合わせの数で ${}_3C_2 = 6$．従って $3 \times 3 = 9$ 個となるね．また，i と j について対称で j と k については反対称というのも考えられるけど，これはゼロテンソルになる．というのは 1 番目と 2 番目の添え字は対称で 2 番目と 3 番目の添え字は反対称ということだから

$$T_{ijk} = -T_{ikj} = -T_{kij} = T_{kji} = T_{jki} = -T_{jik} = -T_{ijk}, \quad \therefore \quad T_{ijk} = -T_{ijk}$$

となって T_{ijk} はゼロになるだろ．

$$\begin{cases} \text{完全反対称} & : \ \text{独立成分は 1 個} \\ T_{ijk}\text{が } jk \text{ について反対称} & : \qquad 〃 \qquad 9 \text{ 個} \\ 〃 \quad i \text{ と } j \text{ について対称}, j \text{ と } k \text{ について反対称} & : \ \text{ゼロテンソル} \end{cases} \tag{2.3.13}$$

ところで，よく知っていると思うけどレビ・チビタの記号 ε_{ijk} は 3 階完全反対称テンソルの代表的なものだ．

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i, j, k\text{：偶置換} \\ -1 & i, j, k\text{：奇置換} \\ 0 & i, j, k \text{ のうちに等しいものがある} \end{cases} \tag{2.3.14}$$

$$\longrightarrow \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}$$

この 3 階完全反対称テンソルを使えば，ベクトルの外積は簡潔に

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \tag{2.3.15}$$

と定義されるのはご存知の通りだ．ε_{ijk} の次の性質はよく活用される．δ_{ij} はいわゆるクロネッカーのデルタ.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell} \\ \displaystyle\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = 2\delta_{k\ell} \\ \displaystyle\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \end{cases} \tag{2.3.16}$$

この ε_{ijk} を使うと 2 階対称テンソルは

$$\varepsilon_{ijk} T_{jk} = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \tag{2.3.17}$$

と書ける．$\because$ $u_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$ とおくと

$$u_1 = T_{23} - T_{32}, \quad u_2 = T_{31} - T_{13}, \quad u_3 = T_{12} - T_{21}$$

で，$u_i = 0$ は $T_{jk} = T_{kj}$ と同じことだからね.

■ 4 階以上の反対称テンソルは存在しない

- さて，4 階の反対称テンソルはどうかということだが，3 次元空間においては 4 階以上の反対称テンソルはすべて 0 テンソルになり，存在しないんだ．仮に $T_{ijk\ell}$ を 4 階反対称テンソルとすると，添え字の i, j, k, ℓ は $1, 2, 3$ のいずれかであるので，このうち少なくとも 2 つは等しい．いま，$i = j$ とすると

$$T_{ijk\ell} = T_{iik\ell}$$

ところが $T_{ijk\ell} = -T_{jik\ell}$ において $i = j$ とすると、$T_{iik\ell} = -T_{iik\ell}$ だから，$T_{iik\ell} = 0$ となる．つまり，$T_{ijk\ell} = 0$ となり，この反対称テンソルは 0 になるね.

■任意の 2 階テンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和

- いま 2 階対称テンソルを S_{ij}，反対称テンソルを A_{ij} と表すと，任意の 2 階テンソル T_{ij} は，対称テンソルと反対称テンソルの和で表すことができる．というのは

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \longleftrightarrow S_{ij} = S_{ji}, \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \longleftrightarrow A_{ij} = -A_{ji} \tag{2.3.18}$$

とおけるだろ．これから

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \tag{2.3.19}$$

となるね．3 階テンソル T_{ijk} の場合は

$$S_{ijk} = \frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{jik}) \longleftrightarrow S_{ijk} = S_{jik}, \quad A_{ijk} = \frac{1}{2}(T_{ijk} - T_{jik}) \longleftrightarrow A_{ijk} = -A_{jik} \tag{2.3.20}$$

として

$$T_{ijk} = S_{ijk} + A_{ijk} \tag{2.3.21}$$

と表すことができる.

2.3.3 交代積（ウェッジ積）

- K氏：2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\\&=(a_ib_j-a_jb_i)=\begin{pmatrix}0 & a_1b_2-b_1a_2 & -(a_3b_1-b_3a_1)\\ -(a_1b_2-b_1a_2) & 0 & a_2b_3-b_2a_3\\ a_3b_1-b_3a_1 & -(a_2b_3-b_2a_3) & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

で定義される 2 階反対称テンソル $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$ の交代積という．ウェッジ積 (くさび積) とか，外積，グラスマン積とも呼ばれる．また，3 個のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の交代積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\end{aligned}\tag{2.3.23}$$

で定義される．この成分は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})_{ijk}&=a_ib_jc_k+b_ic_ja_k+c_ia_jb_k-a_ic_jb_k-b_ia_jc_k-c_ib_ja_k\\&=\begin{vmatrix}a_i & a_j & a_k\\ b_i & b_j & b_k\\ c_i & c_j & c_k\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{2.3.24}$$

となる．2 つのベクトルの交代積は次の規則に従う．

$$\begin{cases}\text{定数倍} & (k\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\wedge(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\\ \text{分配則} & \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}\\ & (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\\ \text{交代性} & \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\end{cases}\tag{2.3.25}$$

同様に 3 つのベクトルの交代積は

$$\begin{cases}\text{定数倍} & (k\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge(k\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(k\boldsymbol{c})=k(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})\\ \text{分配則} & (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\\ & \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\wedge\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\\ & \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{d}\\ \text{交代性} & \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}\end{cases}\tag{2.3.26}$$

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ の交代積を見てみよう．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_3=O\quad(2\text{ 階ゼロテンソル})\\&\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\\&\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\&\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.3.27}$$

となり，$\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ は互いに異なる 2 階反対称テンソルとなる．(2.2.15) より任意の 2 階テンソルは

$$T = T_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{2.3.28}$$

で表せた．いま，A_{ij} を反対称テンソルとすると

$$\begin{aligned} A = A_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j &= A_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + A_{13}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + A_{21}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + A_{23}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 + A_{31}\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 + A_{32}\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 \\ &= A_{12}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1) + A_{13}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1) + A_{23}(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2) \\ &= A_{12}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + A_{13}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + A_{23}\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ &= \sum_{i<j} A_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2}A_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

と表せる．また，$A_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$ がゼロテンソルなら係数 A_{ij} はすべて 0 でなければならない．ということで 3 個の $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立で，反対称テンソルの基底をなすことが分かる．

- エミリー：3 階テンソルは (2.2.19) より

$$T = T_{ijk}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \tag{2.3.30}$$

と表せたわね．2 階反対称テンソルの基底が 3 個の $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$ なら，3 階反対称テンソルの基底はどうなるのかしら？

- K 氏：そうだね，結論からいうと

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \\ &= -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 \\ &= (\varepsilon_{ijk}) \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

となって，独立な基底は 1 個になるんだ．このことは上でやったと同じようにすれば分かるのでフォローしておいてください．ε_{ijk} は 3 階反対称テンソルとなるので，テンソル成分は下図のように $3 \times 3 \times 3$ の 3 階建てのイメージで表せる．

$$(\varepsilon_{ijk}) \equiv \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \varepsilon_{111} & & \varepsilon_{113} & \varepsilon_{211} & & \varepsilon_{213} & \varepsilon_{311} & & \varepsilon_{313} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \varepsilon_{131} & & & & & & & & \end{array}$$

- エミリー：え〜っと，ここでのお話の要点を整理すると次にようになるのね．まず 2 階テンソルに関して

  ・$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ は 2 階テンソルの基底をなす．独立成分は 9 個.

$$T = T_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{2.3.32}$$

・$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_l$ は 2 階反対称テンソルの基底をなす．独立成分は 3 個.

$$A = \frac{1}{2} A_{ij} \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \tag{2.3.33}$$

・2 階対称テンソルは次式が成立する．独立成分の数は 6 個.

$$\varepsilon_{ijk} S_{jk} = 0 \tag{2.3.34}$$

・すべての 2 階テンソルは 2 階対称テンソルと反対称テンソルの和で表される.

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \tag{2.3.35}$$

3 階テンソルに関して

・$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$ は 3 階テンソルの基底をなす．成分の数は $9 \times 3 = 27$ 個.

・$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k$ は 3 階反対称テンソルの基底をなす．独立成分の数は 1 個.

・すべての 3 階テンソルは 3 階対称テンソルと反対称テンソルの和で表される.

$$T_{ijk} = S_{ijk} + A_{ijk} \tag{2.3.36}$$

4 階以上の高階反対称テンソルは存在しない.

2.3.4 テンソルの既約分解

- K 氏：そろそろ第 2 話をお開きにしたいと思うんだが，最後にテンソルの既約分解について少しだけ触れておこう．任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和に分解できたね．既約分解というのはテンソルを既約テンソルに分解することで，既約テンソルというのはトレースが 0 のテンソル，もうそれ以上分解できないテンソルのことをいう．それでは早速具体的にみていこう．2 階テンソルは (2.3.19) でやったように

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \tag{2.3.37}$$

と分解できた．反対称テンソル A_{ij} は $Tr(A) = 0$ だからこれは既約テンソルだね．ところで対称テンソル S_{ij} は必ずしもトレースが 0 でないので既約テンソルではない．そこで

$$\begin{aligned} \mathtt{s}_{ij} &= \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3} T \delta_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} T \delta_{ij}, \quad (T = T_{ii}) \\ \therefore \quad S_{ij} &= \mathtt{s}_{ij} + \frac{1}{3} T \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

としてやれば S_{ij} は既約テンソル $\mathtt{s}_{ij}$ $(Tr(\mathtt{s}) = 0)$ とスカラー $\frac{1}{3} T \delta_{ij}$ に分解することができる.

- エミリー：具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} \mathtt{s}_{11} &= \frac{1}{2}(T_{11} + T_{11}) - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = T_{11} - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \\ \mathtt{s}_{22} &= \frac{1}{2}(T_{22} + T_{22}) - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = T_{22} - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \\ \mathtt{s}_{33} &= \frac{1}{2}(T_{33} + T_{33}) - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = T_{33} - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \\ \therefore \quad & Tr(\mathtt{s}) = \mathtt{s}_{11} + \mathtt{s}_{22} + \mathtt{s}_{33} = 0 \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

となって，$\mathtt{s}$ は既約テンソルになるわね，ナルホド.

- K氏：そうすると T_{ij} は次のように 3 個の既約テンソルに分解できることになるだろう．

$$T_{ij} = \frac{1}{3}T\delta_{ij} + A_{ij} + \mathtt{S}_{ij} \tag{2.3.40}$$

右辺第 1 項はスカラーで 0 階テンソル，第 2 項の反対称テンソルは成分が 3 個でベクトルに相当するので 1 階のテンソル（第 3 話の軸性テンソルの項を参照），第 3 項は 2 階のテンソルということだね．既約テンソルの話は量子力学の角運動量理論で使われるが，詳しいことを知りたければ参考図書として M.E ローズ著（山内恭彦, 森田正人訳）「角運動量の基礎理論」（みすず書房）をあげておこう．

以上で第 2 話を終了する，お疲れ様．第 3 話はテンソルの直交座標変換の話題を取り上げる予定だ．お楽しみに．